ISSN-E: 2697-3650

Minerva Journal
Vol.5, Issue N°14, (pp. 29-39)

https://doi.org/10.47460/minerva.v5i14.161

Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Lascano Edisson
https://orcid.org/0000-0001-8267-6765
elascano3441@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo-Ecuador

Alay Alba
https://orcid.org/0000-0002-5436-9706
alba.alay@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo-Ecuador

Rivadeneira Fredy
https://orcid.org/0000-0002-3106-2170
freddy.rivadeneira@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo-Ecuador

Recibido (18/02/2024), Aceptado (17/04/2024)

Resumen: El objetivo de este trabajo fue probar estadísticamente si el software gratuito GeoGebra es útil como herramienta didáctica para facilitar el proceso de enseñanza–aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (EDO). Con este propósito, se trabajó con un grupo de estudiantes de una carrera de ingeniería a quienes, en primera instancia, se les impartió clases de forma tradicional, mientras que, en la segunda fase se utilizó GeoGebra como herramienta de apoyo didáctico para mejorar la comprensión y facilitar la solución de estas ecuaciones. Las calificaciones que obtuvieron los estudiantes en cada etapa del proceso fueron utilizadas para realizar la prueba no paramétrica de Wilcoxon para dos muestras relacionadas aplicando el software libre R, con lo cual se demostró que la estrategia didáctica implementada permitió que los estudiantes logren una mejor comprensión de la teoría básica de las EDO lineales.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, solución de una EDO, GeoGebra.

Use of GeoGebra as a didactic resource for the solution of linear ordinary differential equations.

Abstract.- The objective of this work was to statistically test whether the free software GeoGebra is useful as a didactic tool to facilitate the teaching-learning process of linear ordinary differential equations (ODE). For this purpose, we worked with a group of engineering students who, in the first instance, were taught traditionally, while in the second phase, GeoGebra was used as a didactic support tool to improve understanding and facilitate the solution of these equations. The grades obtained by the students in each stage of the process were used to perform the Wilcoxon nonparametric test for two related samples applying the free software R, which showed that the didactic strategy implemented allowed the students to achieve a better understanding of the basic theory of linear ODEs.

Keywords: ordinary differential equations, solution of an ODE, GeoGebra.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las ecuaciones diferenciales se origina desde los albores del cálculo con los estudios y descubrimientos de Newton y Leibniz en el siglo XVII. Desde entonces, matemáticos como Jakob y Johann Bernoulli, Cauchy, Riccati, Poncairé y muchos otros han hecho aportes formidables a la teoría de las ecuaciones diferenciales para ampliarla y enriquecerla [1]. Del mismo modo, el campo de aplicación de las ecuaciones diferenciales se ha extendido a áreas como biología, demografía, economía, educación; además de las tradicionales como física, química, astronomía y tantos otros. A partir del 2020, varios matemáticos como: Guinovart, Morales y Cortés en Cuba, Cavalleri, en Uruguay; Pernalete en Perú, Ferreira en Chile y Ramírez-Valverde en México, emprendieron la tarea de desarrollar modelos matemáticos para estudiar y predecir el comportamiento de la pandemia del coronavirus en sus respectivos países. La información que ellos obtuvieron fue empleada por los gobiernos de sus respectivos países para implementar políticas de estado que les permitieron controlar la expansión de la epidemia [2] [3], [4], [5], [6].

En la etapa universitaria, un aspecto que merece especial interés son las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes que toman un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias; una de ellas es la interpretación de las soluciones; es decir, los estudiantes pueden tener dificultades para comprender el significado de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Además de lo anterior, los estudiantes suelen tener problemas para identificar el orden y el grado de una ecuación diferencial, así como para plantear adecuadamente las ecuaciones diferenciales, lo cual implica identificar correctamente las variables de interés, identificar las condiciones iniciales o las condiciones de frontera y formular de forma precisa la ecuación diferencial. Otro aspecto que representa un problema para algunos estudiantes es escribir la ecuación diferencial ordinaria en la forma de la ecuación (2), lo cual les impide o dificulta reconocerla como lineal [7].

Otra dificultad para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales es inherente a estas y consiste en que la mayoría de ellas no tiene solución analítica, por lo cual para resolverlas se debe recurrir a los métodos numéricos y al uso de computadoras y software especializado como Matlab u Octave o a la necesidad de aprender a programar en lenguajes como Python o similares. Cabe destacar que el uso de software privativo especializado puede ser fuente de otras dificultades, tales como las económicas debido a que las licencias de la mayoría de estos programas tienen costos que no siempre están al alcance de los estudiantes; por otra parte, estos programas suelen necesitar el uso de equipos más sofisticados, lo cual nuevamente puede repercutir negativamente en la economía, tanto de los docentes como de los estudiantes.

A escala mundial, un aspecto coyuntural de alta incidencia en los procesos educativos es la nueva realidad impuesta por la pandemia de COVID-19, la cual promovió la masificación forzada del uso de los recursos de la internet, tal como lo reporta la Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT), el organismo especializado de las Naciones Unidas para las tecnologías de la información y la comunicación, entidad que publicó que el número estimado de usuarios de internet aumentó de 4100 millones en 2019 a 4900 millones en 2021 [9]. En esa misma línea de criterio, se calcula que la emergencia sanitaria impulsó un avance de diez años en términos de habituarnos al uso de las tecnologías; lo mismo ocurrió con las universidades, profesores y alumnos; todos tuvieron que adaptarse a las clases en línea y al uso imprescindible de los recursos de la web [10].

Enfocándonos en el ámbito nacional, a pesar de que no se encontraron estudios relativos en el Ecuador, las dificultades de aprendizaje de las EDO son un hecho conocido en la institución educativa donde se realizó este trabajo, precisamente, hallar una forma de superar esas dificultades fue una de las motivaciones para realizar este estudio.

Para empezar, es necesario considerar la importancia que otorga el Estado Ecuatoriano al aprendizaje de las matemáticas, lo cual queda evidenciado en la sección Fundamentos epistemológicos y pedagógicos, del texto publicado por el Ministerio de Educación del Ecuador en el que se menciona a la Representación como el segundo de tres fundamentos; en esa sección se resaltan la importancia del lenguaje para comunicar interpretaciones y soluciones de los problemas, para reconocer conexiones entre conceptos relacionados, de la modelización para aplicar la Matemática a problemas de la vida real, del uso de los nuevos recursos de las tecnologías de la información y la comunicación en el quehacer matemático [8]; de este escrito también deduce la importancia y la pertinencia que otorga el Estado Ecuatoriano a la aplicación de los recursos tecnológicos y a la modelización para resolver problemas matemáticos, lo cual debe servir al menos de base procedimental para aplicarse en la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas en la formación universitaria, en las diversas áreas de pregrado, por lo menos.

Por lo expuesto y considerando la limitada economía de la mayoría de estudiantes de las universidades públicas del Ecuador y las dificultades académicas en el aprendizaje de las EDO, se propuso el uso del software gratuito GeoGebra como herramienta didáctica que facilite la visualización, la manipulación y los registros representativos de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales o de primer orden, para aprovechar las ventajas que este software ofrece, por ejemplo ser multiplataforma, su requerimiento de recursos modestos de hardware por lo cual puede ser instalado en celulares, computadoras y tabletas de gama media, además de ser multilingüe, entre otras ventajas [11].

A partir de estos antecedentes, el objetivo de este trabajo fue probar estadísticamente si GeoGebra es útil como herramienta didáctica para facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de modo que los estudiantes superen las dificultades reportadas en los trabajos de investigación consultados.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en la primera parte consta una breve reseña histórica del proceso de desarrollo de las EDO y sus aplicaciones en la actualidad; en la segunda parte se presenta de forma concisa la teoría básica de las EDO lineales o de primer orden, se presenta el Problema de Cauchy y se reseñan los métodos de solución analíticos y numéricos, así como el uso de GeoGebra como herramienta de apoyo didáctico para resolver las EDO; finalmente, en esta misma sección se presenta una sinopsis de la teoría pedagógica que sustenta el presente trabajo. En la tercera parte, se describen los procesos para la obtención de datos y el análisis estadístico efectuado. En la cuarta parte, consta el análisis estadístico y en la parte final se presentan los resultados obtenidos.

DESARROLLO

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial en la que la variable dependiente aparece con su primera derivada respecto a una variable independiente; una característica de estas ecuaciones es que no existe un método general para resolverlas en términos de funciones elementales. Además, en estas ecuaciones se debe cumplir que la función $f(t, x)$ dependa linealmente de la variable dependiente x [1] [12]. En la ecuación (1), de modo muy simple se observa que t es la variable independiente, y que x, es la variable dependiente. La forma general de una EDO de primer orden es la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (1)$$

La importancia práctica de las EDO radica en sus aplicaciones en todas las ramas de la ingeniería; así mismo, se emplean para modelizar fenómenos físicos, químicos, biológicos e inclusive, fenómenos sociales [13]; la aplicación de las ecuaciones diferenciales para elaborar modelos matemáticos se extiende, por lo tanto, a todas las áreas de investigación científica.

Toda ecuación diferencial lineal ordinaria puede ser escrita de la siguiente forma:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (2)$$

Se debe enfatizar que *p(x)* y *q(x)* y deben ser funciones conocidas y continuas en un intervalo $a< b < c$. Por otro lado, para comprobar que una función φ definida en algún intervalo I es solución de una ecuación diferencial en este intervalo, se debe reemplazar φ en la ecuación diferencial y esta debe reducirse a una identidad conocida [1]. Entre los métodos analíticos para resolver una ecuación diferencial lineal o de primer orden se pueden mencionar el factor integrante y la variación de parámetros. Cuando la ecuación diferencial no tiene solución analítica, una opción es utilizar métodos numéricos, como Euler, Heun y Runge – Kutta [13]; otra opción es hacer uso de las TIC o emplear programas especializados como GeoGebra, Matlab u Octave; también es posible emplear recursos en línea como Symbolab, Sr. Examen o lenguajes de programación como Python y C ++, para resolverlas.

Cuando se resuelve la ecuación diferencial (2), se obtiene una función $G(x, y, c) = 0$, conocida como solución general, en la cual la constante real arbitraria *c*, indica que la función *G* representa a un conjunto de soluciones, llamado familia de soluciones uniparamétricas de (2), lo cual implica que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones [12].

Si se da una condición inicial, se puede asignar un único valor al parámetro c y se obtiene una solución particular de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la familia de soluciones de la ecuación diferencial

$$y' - \frac{y}{x} = xsen(x) \qquad (3)$$

es $y_G = cx - xcos(x)$, donde c es un número real cualquiera. En este sentido, para una ecuación diferencial la condición $x|_{t\,=\,t_0} = x_0$ se llama condición inicial. Al problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $x' = f(t, x)$ que satisface a la condición inicial se le llama Problema de Cauchy [14].

A. Uso de GeoGebra para resolver EDO lineales

GeoGebra, entre su vasta gama de funciones, posee varias que permiten resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Se utiliza la función *ResuelveEDO* para atender los problemas relacionados con este tipo de ecuaciones; a continuación, se detalla el proceso para el uso de esta función:

1. Ejecutar GeoGebra.
2. Abrir la vista gráfica (casi siempre GeoGebra se abre por defecto en esta vista).
3. En la barra de funciones de GeoGebra ingresar: “*ResuelveEDO*”.
4. Seleccionar la opción *ResuelveEDO(f' (x, y)).*
5. Escribir la ecuación diferencial que se desea resolver en la forma *y' = g(x, y)* e ingresar *g(x, y)* en la función “*ResuelveEDO( )*” de Geogebra.
6. Se creará un deslizador, que puede ser editado; y al mismo tiempo, aparecerá la solución general de la ecuación diferencial y el gráfico respectivo.

En la figura 1 se muestra una pequeña parte de la familia de soluciones de la ecuación diferencial (3) para valores entre -3 y 1.

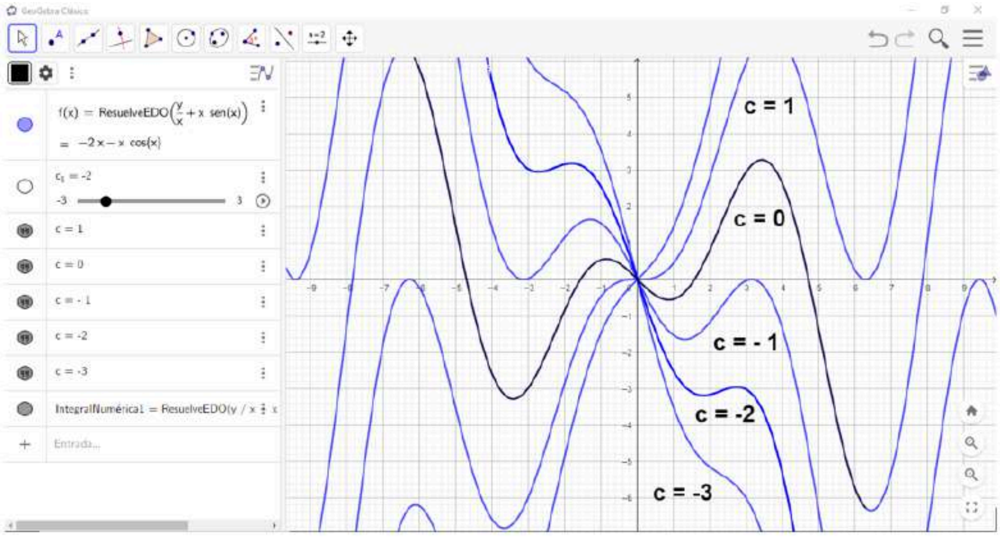

Fig. 1. Gráfico en GeoGebra de la solución general de

La curva de color negro es la gráfica de la solución numérica de la misma ecuación diferencial en el intervalo [-2π, 2π]. La función de GeoGebra que se utiliza para obtener la solución numérica es: *ResuelveEDO(f'(x, y)*, *x* inicial, *y* inicial, *x* final, Paso), donde "*x* inicial" e "*y* inicial" son una condición inicial, x final es el extremo derecho del intervalo de integración y "Paso" es la amplitud constante del subintervalo de integración que se desea utilizar. Para el ejemplo resuelto, se utilizaron: x inicial = -2*Π* , y inicial = 2Π , x final = 2Π y Paso = 0,01.

El uso didáctico de GeoGebra en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se sustenta en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que fue desarrollada y propuesta por el filósofo y psicólogo francés Raymond Duval en 1995. Partiendo de que, por definición, la Semiótica designa la teoría general de los signos, tanto verbales como no verbales, respecto a su significación, producción, transmisión e interpretación, Duval enfocó su teoría en el estudio de los diferentes sistemas de signos que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, de funcionamiento y de recepción [15]. De acuerdo con Duval, los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción, por lo tanto, es necesario representarlos; por ello en su teoría Duval establece que es esencial el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático, porque la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de la producción de representaciones semióticas y que cada registro de representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que él representa [15].

La Teoría de Registros de Representación Semiótica ha sido aplicada con éxito en el ámbito educativo, pues se ha comprobado que su uso influye significativamente en las competencias matemáticas de los estudiantes [16]. Es muy importante relievar que los planteamientos de Duval tienen directa concordancia con los planteamientos del Ministerio de Educación del Ecuador, entidad que publicó que, en matemáticas, la Representación "se refiere al uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, y a la traducción y conversión de estos. El lenguaje matemático es representacional, pues nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir; y es instrumental, según se refiera a palabras, símbolos o gráficas" [8].

En la realización de este trabajo, la tarea principal del docente fue utilizar los recursos didácticos adecuados para motivar a los estudiantes, creando de forma conjunta el ambiente propicio para que ellos logren la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. El uso de GeoGebra fue clave para lograr este propósito ya que permite la manipulación de símbolos, imágenes y se facilita el trabajo grupal, fortaleciendo el aprendizaje colaborativo y la socialización, se fomentan la experimentación y verificación de hipótesis y se simplifica la solución de problemas. Además, GeoGebra permite ludificar la experiencia de aprendizaje, lo cual sumado con el trabajo en equipo potencian la zona de desarrollo próximo de Vigotsky [17].

III. METODOLOGÍA

Este trabajo tiene enfoque mixto, diseño descriptivo y cuasiexperimental, corte transversal, alcance correlacional y su concepción se circunscribe en la aplicación del método hipotético deductivo. La validación estadística se efectuó con la aplicación de la prueba no paramétrica de Wilcoxon para dos muestras relacionadas, utilizando el software libre R [18]. El grupo de estudiantes con los que se trabajó cursaban cuarto semestre de una carrera de ingeniería en una universidad pública ecuatoriana; todos ellos estaban tomando la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

La primera fase del trabajo consistió en realizar clases de refuerzo de derivadas y técnicas de integración. Posteriormente, se introdujo el tema EDO lineales, realizando una reseña histórica y mencionando las numerosas aplicaciones de estas en todas las áreas académicas, científicas y de ingeniería; incentivando a los estudiantes para que participen de forma activa en el proceso de enseñanza – aprendizaje. La segunda etapa fue plantear una prueba que se utilizó como pretest; este instrumento fue cuidadosamente revisado, tanto en su contenido, como en su forma, aplicando la Taxonomía de Bloom, de modo que se abarquen los aspectos conceptuales, la comprensión y la aplicación. A los estudiantes se les proporcionó una rúbrica de evaluación que fue utilizada por el docente para la calificación individual.

En la tercera fase del proceso, se empleó GeoGebra como herramienta de apoyo didáctico, teniendo como objetivos reforzar conocimientos, aclarar conceptos y facilitar la compresión de la solución de las EDO lineales. La aplicación de la estrategia didáctica se realizó con la modalidad de entorno colaborativo para aprovechar los recursos humanos individuales y grupales, buscando activar la zona de desarrollo próximo, fomentando la socialización y la creatividad de cada estudiante [19]. Como herramienta de apoyo tecnológico se utilizaron los teléfonos celulares, en los que previamente se había instalado el software. La cuarta parte del trabajo consistió en plantear el post test, cuyo instrumento de evaluación fue elaborado y planteado con la misma rigurosidad que el pretest; los resultados obtenidos fueron ingresados en la base de datos que se utilizó para realizar el análisis estadístico pertinente, utilizando el software libre R. Para la operacionalización de variables, se consideró como variable independiente la aplicación de GeoGebra como recurso didáctico; mientras que las calificaciones obtenidas en el pretest y el post test fueron consideradas como la variable dependiente [20].

A. Tipo de muestreo

El tipo de muestreo fue no probabilístico y por conveniencia; por ello no fue necesario calcular el tamaño de la muestra, pues se trabajó con todos los estudiantes inscritos en el curso regular de la asignatura. Con este fundamento, el primer ítem de cada uno de los instrumentos de evaluación se formuló para indagar el nivel de conceptualización alcanzado por los estudiantes; en esta parte se proporcionó una tabla cuya primera columna contenía seis ecuaciones y los estudiantes debían reconocer el orden, el grado y determinar si cada una es o no lineal. El segundo ítem se elaboró para cuantificar el nivel de comprensión de los estudiantes acerca del significado de la solución general de una EDO, para lo cual se les proporcionó una primera ecuación y luego una segunda ecuación para que ellos determinen si esta última es o no una solución general de la primera. Finalmente, en el tercer ítem se planteó un problema de valores iniciales (problema de Cauchy) para determinar el nivel de su capacidad de resolución de problemas [27].

IV. RESULTADOS

A. Análisis del pretest

En concordancia con los resultados que reportan los estudios previamente realizados acerca de las dificultades que presentan los estudiantes en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias [7], la mayoría de los estudiantes tuvo dificultades para determinar el orden y el grado de las EDO, así como de demostrar o descartar la linealidad. Los datos recogidos a partir de la realización del pretest se presentan en la tabla 1:

Tabla 1. Errores cualitativos contabilizados en el pretest.

Errores observados	**Proporción de errores**
No reconoce el orden de la EDO	25/186 = 0,134
No reconoce el grado de la EDO	62/186 = 0,333
No determina si la EDO es lineal	34/186 = 0,183

El análisis estadístico descriptivo de las calificaciones del pretest se presenta a continuación:

```
summary(Pretest)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   2.000   3.375   4.750   4.871   5.625  10.000
```

Fig 2. Análisis estadístico descriptivo de los datos del pretest.

Se observó que el 75 % de estudiantes obtuvo una calificación menor o igual a 5,63; lo cual se debió a que la mayoría de ellos no logró resolver el segundo o el tercer ítem de la evaluación. Estos resultados concuerdan con los reportes de las investigaciones anteriores [7]. En cuanto al ajuste de los datos, la prueba de Lilliefors permitió determinar, con un 95 % de confianza, que las calificaciones del pretest no se distribuyen normalmente, considerando que el p-valor es mucho menor que 0,05. Se muestran a continuación, los resultados obtenidos:

```
lillie.test(Pretest)
```

```
##
##  Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
##
## data:  Pretest
## D = 0.18398, p-value = 0.009025
```

Fig 3. Resultados de la prueba de hipótesis para probar normalidad de los datos del pretest.

B. Análisis del post test

Luego del uso de GeoGebra como herramienta de apoyo para resolver EDO lineales y de realizar el trabajo didáctico pertinente, la contabilización de errores observados se muestra en la Tabla 2:

Tabla 2. Errores cualitativos contabilizados en el post test.

Errores observados	Proporción de errores
No reconoce el orden de la EDO	1/186 = 0,0054
No reconoce el grado de la EDO	12/186 = 0,064
No determina si la EDO es lineal	61/186 = 0,328

Adicionalmente, estos fueron los resultados del análisis estadístico descriptivo de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el post test:

```
summary(Postest)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   2.000   5.500   7.000   6.669   8.375  10.000
```

Fig 4. Análisis estadístico descriptivo de los datos del post test.

Se observó que el 75 % de estudiantes obtuvo una calificación igual o menor que 8,38, es decir en el post test se observó una diferencia positiva en las calificaciones de los estudiantes. Luego, para validar esta observación se realizó la respectiva prueba de hipótesis. En primer lugar, se realizó un análisis visual; es importante mencionar que este análisis gráfico no mostró que los datos tuvieran distribución normal, tal como se observa en la siguiente figura.

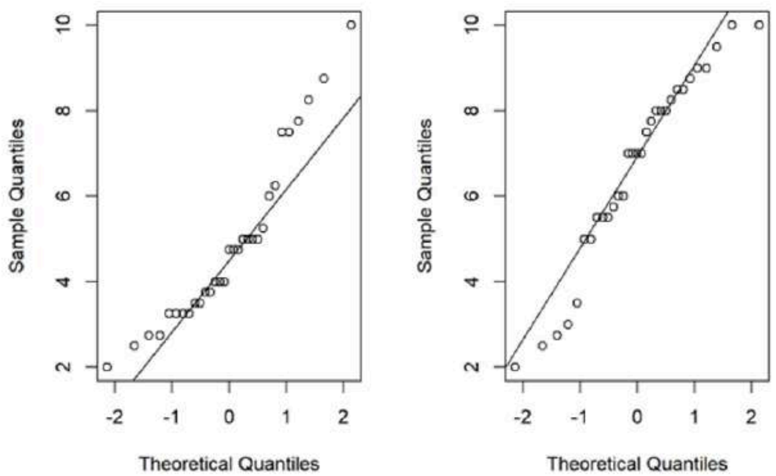

Fig 5. Gráficos QQnorm para detectar normalidad de los datos.

Más concluyente, la prueba de Lilliefors no proporcionó suficiente evidencia estadística para descartar la hipótesis nula acerca de la normalidad de las calificaciones del post test.

```
lillie.test(Postest)
```

```
##
##  Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
##
## data:  Postest
## D = 0.1391, p-value = 0.1317
```

Fig. 6. Resultados de la prueba de hipótesis para probar normalidad de los datos del post test.

C. Prueba de hipótesis para comparación de muestras pareadas

Considerando que no se cumplieron los supuestos de normalidad de Gauss debido a que los datos del pretest no siguen una distribución normal, se utilizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon para comparar muestras pareadas, con lo cual se estableció con un 95 % de confianza la existencia de diferencia estadística entre las medianas de las calificaciones del pretest y del post test, corroborando los resultados de[2] los análisis descriptivos: 5,63, pretest y 8,38, post test.

Las hipótesis fueron:
Ho: no hay diferencia entre las medianas de las calificaciones del pretest y del post test.
H1: si hay diferencia entre las medianas de las calificaciones del pretest y del post test.

```
wilcox.test(Pretest, Postest)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  Pretest and Postest
## W = 259.5, p-value = 0.001882
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Fig. 7. resultados de la prueba de hipótesis para comparación de muestra pareadas.

La prueba de hipótesis demostró, con un 95 % de confianza, la existencia de suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y permitió concluir que la mediana de las calificaciones del pretest es diferente a la mediana de las calificaciones del post test. Sin embargo, es importante destacar que, a pesar de los resultados favorables, habría que realizar observaciones posteriores del desempeño académico de este grupo de estudiantes para verificar si el aprendizaje obtenido por ellos puede considerarse significativo.

CONCLUSIONES

Los resultados del análisis estadístico demostraron que la estrategia didáctica implementada permitió que los estudiantes logren una mejor comprensión de la teoría básica de las EDO lineales. Además, se observó un notable incremento en el rendimiento académico de los estudiantes, evidenciado por un aumento significativo en sus calificaciones y una mayor participación en las actividades relacionadas con el tema. Estos hallazgos respaldan la eficacia de la estrategia didáctica empleada para facilitar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales, lo que sugiere su utilidad como herramienta pedagógica en contextos educativos similares. Por otra parte, la experiencia obtenida al realizar este trabajo permite afirmar que los profesores pueden utilizar GeoGebra para crear material de apoyo, ejercicios y actividades de manera dinámica e interactiva.

REFERENCES

[1] W. Boyce and R. DIPrima, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Cuarta Ed. México D. F., 2000.
[2] R. FALCÓN, Y. SIFONTE, and A. ARCE, “Nuevos modelos matemáticos y situación epidemiológica de la COVID-19 en el país.” Accessed: Aug. 12, 2023.
[Online]. Available: https://www.yaguajay.gob.cu/actualidad/noticias/7109-nuevos-modelos-matematicos-y-situacion-epidemiologica-de-la-covid-19-en-el-pais.

[3] F. Cavalleri, M. Irisarri, G. Bittar, G. Cuello, M. Pérez, and A. Aleman, "Modelos epidemiológicos en la pandemia por SARS-CoV-2: concepto, aplicaciones y alcance," Rev. Uruguaya Med. Interna, vol. 05, no. 03, pp. 4–8, 2020, doi: 10.26445/05.02.1.
[4] J. Pernalete and Y. Odor, "El modelo Kermack-McKendrick en la propagación de cepas COVID-19: Perú 2020-2021," Enfermería Glob., vol. 22, no. 1, pp. 309–336, 2023, doi: 10.6018/eglobal.521971.
[5] C. Barría-Sandoval, P. Salas, and G. Ferreira, "Modelos de Series de Tiempo para Predecir el Número de Casos de Variantes Dominantes del SARS-COV-2 Durante las Olas Epidémicas en Chile," Rev. Politécnica, vol. 50, no. 3, pp. 17–26, 2022, doi: 10.33333/rp.vol50n3.02.
[6] G. Ramírez-Valverde and B. Ramírez-Valverde, "Modelo estadístico para defunciones y casos positivos de covid-19 en México," EconoQuantum, pp. 1–20, 2021, doi: 10.18381/eq.v18i1.7223.
[7] C. Guerrero Ortiz, M. Camacho Machín, and H. R. Mejía Velasco, "Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema," Enseñanza las Ciencias. Rev. Investig. y Exp. didácticas, vol. 28, no. 3, pp. 341–352, 2011, doi: 10.5565/rev/ec/v28n3.431.
[8] Ministerio de Educación del Ecuador, Bachillerato General Unificado, Primera Ed. Quito, Ecuador: Ministerio de Educación del Ecuador, 2016. [Online]. Available: https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/BGU1.pdf
[9] Unión Internacional de Telecomunicaciones, "2.900 millones de personas siguen careciendo de conexión," UIT. Accessed: Sep. 16, 2023. [Online]. Available: https://www.itu.int/es/mediacentre/Pages/PR-2021-11-29-FactsFigures.aspx
[10] G. Rodríguez, "Pandemia acelera 10 años el uso de tecnologías digitales," Boletín UNAM-DGCS-419. Accessed: Sep. 16, 2023. [Online]. Available: https://www.dgcs.unam.mx/boletin/bdboletin/2021_419.html
[11] GeoGebra, "¿Qué es GeoGebra?" Accessed: Sep. 09, 2023. [Online]. Available: https://www.geogebra.org/about?lang=es
[12] B. González, D. Abreu, M. Jiménez, M. I. Marrero, and Alejandro Sanabria, "Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden," Universidad de La Laguna, vol. 1, no. 1. San Cristóbal de La Laguna, España, pp. 1–31, 2013.
[Online].Available: https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6024/mod_resource/content/1/tema5/ME5-ecdiferenciales.pdf
[13] S. Chapra and R. Canale, Métodos Numéricos para ingenieros. Mexico D.F., 2015.
[14] . Kiseliov, M. Krasnov, and G. Makarenko, Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, Cuarta Ed., vol. 13. Moscú, 2018.
[15] M. Castro, M. González, S. Flores, O. Ramirez, M. Cruz, and M. Fuentes, "Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I.," Entreciencias diálogos en la Soc. del Conoc., vol. 5, no. 13, pp. 1–14, 2017.
[16] D. Lizana Chauca and R. P. Antezana Iparraguirre, "Representación semiótica en el aprendizaje de conceptos básicos de la estructura algebraica de grupo," Horiz. la Cienc., vol. 11, no. 21, pp. 177–188, 2021, doi: 10.26490/uncp.horizonteciencia.2021.21.904.
[17] M. A. Alarcón-Diaz, H. H. Alarcón-Diaz, L. S. Rodríguez-Baca, and N. Alcas-Zapata, "Intervención educativa basada en la gamificación: experiencia en el contexto universitario," Eleuthera, vol. 22, no. 2, pp. 117–131, 2020, doi: 10.17151/eleu.2020.22.2.8.
[18] S. Siegel and J. Castellan, Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta, Cuarta. México, 1998.

[19] O. Acaro, “El GeoGebra en la enseñanza de la matemática en el Colegio Nacional Andrés Bello,” Pontificia Universidad Católica del Ecuador, 2021.
[Online]. Available: http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/18917/ACAROCALVA-TESIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y
[20] R. Hernández-Sampieri and C. Mendoza, Metodología de la investigación Las rutas cuantitativas. 2018.