

Optimización de carteras de inversión mediante programación cuadrática: un enfoque desde el modelo de Markowitz

Optimizing Investment Portfolios Using Quadratic Programming: An Approach from the Markowitz Model

Ferdinand Eddington Ceballos Bejarano¹, fceballos@unsa.edu.pe, <https://orcid.org/0000-0003-2867-2397>

Juan Carlos Hihuaña Hallasi², jhihuana@ucsm.edu.pe, <https://orcid.org/0009-0002-9550-1977>

Judid Carina Viza Huayllaso¹, jvizah@unsa.edu.pe, <https://orcid.org/0009-0009-8311-7282>

¹Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Arequipa, Perú.

²Universidad Católica de Santa María. Arequipa, Perú.

Recibido (10/01/2025), Aceptado (22/03/2025)

Resumen. Se analiza la aplicación del modelo de Markowitz a partir de cinco activos financieros, se construyó una matriz de rendimientos logarítmicos para estimar los parámetros. Mediante la resolución computacional se obtuvo el portafolio óptimo que cumple con un retorno mínimo establecido, minimizando simultáneamente el nivel de riesgo. Los resultados se visualizaron a través de la frontera eficiente, identificando las combinaciones óptimas entre riesgo y rentabilidad. Se concluye que el modelo de Markowitz sigue siendo una herramienta vigente y valiosa para la gestión racional de inversiones, especialmente cuando se complementa con recursos computacionales que permiten adaptarlo a diversos contextos financieros.

Palabras clave: Markowitz, activos financieros, simulación computacional, gestión de inversiones.

Abstract- The application of the Markowitz model is analyzed from five financial assets, a matrix of logarithmic returns was constructed to estimate the parameters. Through computational resolution, the optimal portfolio was obtained that complies with an established minimum return, simultaneously minimizing the level of risk. The results were visualized across the efficient frontier, identifying the optimal combinations between risk and return. It is concluded that the Markowitz model continues to be a valid and valuable tool for the rational management of investments, especially when it is complemented with computational resources that allow it to be adapted to various financial contexts.

Keywords: Markowitz, financial assets, computer simulation, investment management.

I. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las finanzas modernas, la toma de decisiones sobre inversión enfrenta desafíos crecientes debido a la volatilidad de los mercados, la diversidad de activos financieros disponibles y la necesidad de maximizar rendimientos minimizando riesgos. Frente a este contexto, la teoría de carteras formulada por Harry Markowitz en 1952 representa un hito fundamental, al introducir un enfoque cuantitativo basado en la relación entre riesgo y rentabilidad esperada, a través del uso de herramientas matemáticas como la programación cuadrática. El modelo de Markowitz parte del supuesto de que los inversionistas racionales prefieren carteras con mayor rentabilidad y menor riesgo, medido este último mediante la varianza de los

retornos. A partir de esta premisa, el modelo permite determinar una frontera eficiente de inversión que representa el conjunto óptimo de combinaciones de activos. Esta frontera se construye resolviendo un problema de optimización sujeto a restricciones, que busca asignar los pesos adecuados a cada activo para obtener el mejor equilibrio riesgo-retorno posible.

Desde la formulación del modelo de selección de carteras por Harry Markowitz en 1952, la optimización de portafolios se ha consolidado como un pilar fundamental de la teoría financiera moderna [1]. Este modelo introdujo el concepto de eficiencia en la relación riesgo-retorno, proponiendo un enfoque cuantitativo que, mediante programación cuadrática, permite encontrar combinaciones óptimas de activos financieros para maximizar la rentabilidad esperada bajo un nivel de riesgo aceptable, o bien minimizar el riesgo para una rentabilidad mínima establecida. Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa y Barbutín-Díaz [2], reflexionaron sobre la utilidad teórica del modelo de Markowitz y mostraron diversas limitaciones que afectan su aplicabilidad en contextos reales. Entre los principales desafíos identificados, destacan la sensibilidad del modelo a los estimadores de retornos esperados, la escasa diversificación derivada de portafolios altamente concentrados y la falta de estabilidad ante pequeños cambios en los datos de entrada. Estas deficiencias, derivadas en parte del uso exclusivo de datos históricos, limitan la robustez del modelo en entornos financieros dinámicos.

El mismo estudio propone como alternativa el modelo de Black-Litterman, que extiende el marco teórico de Markowitz incorporando expectativas del inversionista y técnicas bayesianas para ajustar los rendimientos esperados. Esta evolución metodológica ha sido ampliamente reconocida por su capacidad de generar portafolios más diversificados y estables, permitiendo una gestión más intuitiva y realista de las decisiones de inversión [3]. La revisión de estos antecedentes permite reafirmar la relevancia del modelo de Markowitz como punto de partida en la optimización de carteras, a pesar de sus limitaciones prácticas. En este contexto, el presente trabajo se enfoca en una aplicación concreta del modelo original, explorando su utilidad mediante programación cuadrática y simulación computacional, lo cual permite comprender sus potencialidades y limitaciones desde una perspectiva actual [4].

El presente estudio tiene como objetivo aplicar el modelo de Markowitz mediante programación cuadrática para la optimización de una cartera de inversión compuesta por cinco activos financieros. A través de datos simulados y el uso de herramientas computacionales, se construirá la frontera eficiente y se analizarán los resultados obtenidos en términos de rentabilidad esperada, riesgo asociado y composición óptima de la cartera. Con ello, se busca no solo demostrar la aplicabilidad del modelo en contextos reales, sino también destacar su relevancia como instrumento clave para la gestión financiera estratégica.

II. METODOLOGÍA

Para el desarrollo del presente estudio se adoptó un enfoque cuantitativo, orientado a la simulación computacional de una cartera de inversión, utilizando el modelo de Markowitz basado en programación cuadrática. El proceso metodológico se estructuró en varias etapas secuenciales que permitieron desde la selección de activos hasta la generación e interpretación de la frontera eficiente.

Se seleccionó un conjunto de cinco activos financieros representativos del mercado bursátil. Estos activos fueron elegidos con base en criterios de diversidad sectorial y disponibilidad de datos históricos. Para garantizar la simplicidad del modelo sin perder validez, se trabajó con información correspondiente a un periodo de 12 meses de precios diarios. En esta fase, los datos fueron obtenidos desde fuentes financieras abiertas, como Yahoo Finance, y generados de forma sintética para propósitos académicos. A partir de los precios diarios de cierre de cada activo, se calcularon los rendimientos logarítmicos diarios, utilizando la

ecuación (1).

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (1)$$

donde P_t representa el precio de cierre del día t . Luego, se construyó una matriz de rendimientos que sirvió como base para estimar los parámetros necesarios para el modelo: la media de retornos esperados de cada activo, la matriz de varianzas y covarianzas, y el coeficiente de correlación entre activos. La tabla se referencias como Tabla.

A. Formulación del modelo de optimización

El modelo de Markowitz fue formulado bajo el enfoque clásico de programación cuadrática. El objetivo fue minimizar el riesgo total del portafolio, definido como la varianza del retorno, sujeto a las siguientes restricciones:

- La suma de los pesos asignados a los activos debe ser igual a 1.
- El retorno esperado del portafolio debe alcanzar un umbral mínimo establecido $R_{\min}$.
- Los pesos asignados a cada activo deben estar acotados entre 0 y 1 (no se permitieron posiciones cortas).

Matemáticamente, el problema se expresa como:

$$\omega^T \Sigma \omega \quad (2)$$

$$\text{sujeto a } \omega^T \mu \geq R_{\min}, \quad \sum_i \omega_i = 1, \quad 0 \leq \omega_i \leq 1 \quad (3)$$

donde: ω es el vector de pesos del portafolio; Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos; μ es el vector de retornos esperados; y $R_{\min}$ es el retorno mínimo deseado.

B. Implementación computacional

La resolución del modelo se llevó a cabo utilizando Python y Jupyter Notebook, con el apoyo de librerías especializadas como NumPy, Pandas, Matplotlib y CVXPY. Estas herramientas permitieron programar el modelo de optimización, simular distintas combinaciones de activos y trazar la frontera eficiente, la cual representa todas las combinaciones posibles de portafolios óptimos para distintos niveles de riesgo. Adicionalmente, se utilizó Microsoft Excel para construir tablas de resumen y realizar cálculos auxiliares, facilitando así el análisis y la validación de los resultados obtenidos.

III. RESULTADOS

La Figura 1 muestra la frontera eficiente obtenida mediante la implementación del modelo de optimización de carteras de Markowitz utilizando programación cuadrática. En el eje horizontal se representa el riesgo del portafolio, medido a través de la desviación estándar de los rendimientos, mientras que en el eje vertical se observa el retorno esperado correspondiente a cada combinación de activos. Por otra parte, la curva azul representa todas las combinaciones posibles que ofrecen el mejor retorno esperado para un determinado nivel

de riesgo, conformando así la frontera eficiente. Se evidencia una relación creciente y convexa, característica de este modelo, donde conforme se incrementa el riesgo tolerado por el inversionista, es posible acceder a mayores retornos esperados.

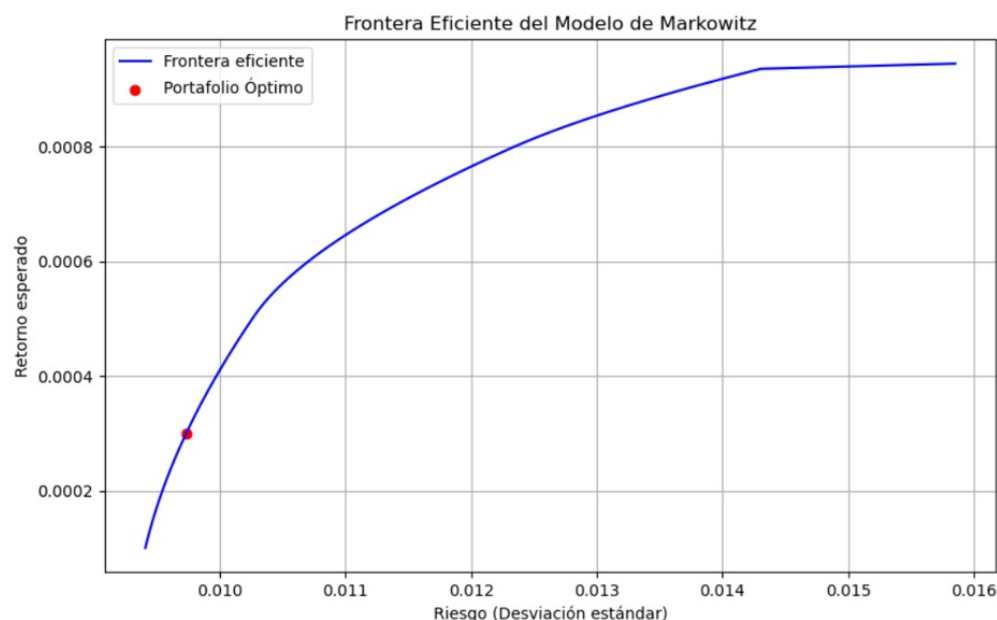


Fig. 1. Frontera eficiente generada a partir del modelo de Markowitz.

El punto rojo destaca el portafolio óptimo, es decir, aquel que cumple con el retorno mínimo exigido por el inversionista (en este caso, $R_{min} = 0,0003$, minimizando al mismo tiempo el nivel de riesgo. Este portafolio constituye una solución eficiente y racional desde el punto de vista del equilibrio entre rentabilidad y exposición al riesgo, y es el resultado del proceso de optimización sujeto a las restricciones establecidas en el modelo.

La Tabla 1 presenta la distribución óptima de pesos obtenida para cada uno de los cinco activos seleccionados en la cartera de inversión. Estos valores fueron calculados mediante programación cuadrática bajo el enfoque del modelo de Markowitz, considerando la minimización del riesgo sujeto a un retorno mínimo deseado de 0,0003 unidades diarias. Se observa que el modelo asigna mayores proporciones de inversión a aquellos activos con una mejor relación entre retorno y riesgo, mientras que otros activos, como en el caso del Activo 4, pueden quedar excluidos si su inclusión no mejora la eficiencia del portafolio. Esta asignación óptima de pesos permite construir un portafolio diversificado, en el que se aprovechan las covarianzas entre activos para reducir el riesgo global. Los resultados evidencian el poder del modelo de Markowitz como herramienta para la toma de decisiones financieras fundamentadas en análisis cuantitativo.

Tabla 1. Distribución óptima de pesos obtenida para cada uno de los activos

Activo	Peso óptimo
Activo 1	0,2438
Activo 2	0,2344
Activo 3	0,2776
Activo 4	0,1823
Activo 5	0,0619

Como se observa, el modelo favorece una mayor asignación de capital al Activo 3 (27,76%), seguido de los activos 1 y 2, mientras que el Activo 5 recibe la menor proporción de inversión. Esta decisión es coherente con la lógica del modelo, que busca maximizar la eficiencia del portafolio al combinar activos con buena relación riesgo-retorno y covarianza favorable entre ellos. La asignación resultante garantiza una diversificación adecuada, reduciendo el riesgo total del portafolio sin sacrificar el retorno esperado.

CONCLUSIONES

El presente estudio permitió aplicar con éxito el modelo de Markowitz a la optimización de una cartera compuesta por cinco activos financieros, empleando técnicas de programación cuadrática. A través del análisis cuantitativo realizado, se logró construir una frontera eficiente que refleja las combinaciones óptimas entre riesgo y retorno, brindando al inversionista una herramienta poderosa para la toma de decisiones racionales en contextos de incertidumbre. Los resultados obtenidos evidencian que, bajo ciertas condiciones y restricciones, es posible identificar un portafolio óptimo que minimiza el riesgo para un retorno esperado deseado. En este caso, el portafolio propuesto presenta una asignación diversificada, con predominancia de activos que ofrecen una mejor relación entre rentabilidad y volatilidad, mientras que aquellos menos eficientes reciben pesos menores.

Asimismo, la visualización gráfica de la frontera eficiente y del punto óptimo demuestra la validez del enfoque teórico de Markowitz, y cómo este puede ser adaptado a entornos reales mediante simulaciones computacionales. Aunque el modelo tiene limitaciones, como la sensibilidad a las estimaciones de parámetros y la necesidad de supuestos como la normalidad de los retornos, su aplicabilidad sigue siendo vigente en la gestión de portafolios moderna. Por tanto, se puede afirmar que la integración de herramientas de análisis matemático con técnicas computacionales no solo facilita la evaluación cuantitativa de decisiones financieras, sino que fomenta una comprensión más profunda del equilibrio riesgo-retorno, lo cual es fundamental para construir estrategias de inversión sólidas, informadas y adaptables al perfil del inversionista.

REFERENCIAS

- [1] P. Gálvez, M. Salgado, and M. Gutiérrez, "Optimización de carteras de inversión: Modelo de markowitz y estimación de volatilidad con garch," Universidad del Bío-Bío, Chile, 2023, [En línea]. Disponible en: <https://core.ac.uk>.
- [2] E. Franco-Arbeláez, W. Avendaño-Rúa, and S. Barbutín-Díaz, "Modelo de markowitz y modelo de black-litterman en la optimización de portafolios de inversión," *Saber, Ciencia y Libertad*, vol. 14, no. 2, pp. 313–330, jul.–dic. 2019.
- [3] J. H. Vargas-Durán, A. C. Rodríguez-Patrón, and E. A. Jiménez-Vega, "Optimización de carteras de inversión con el modelo de markowitz: aplicación con datos reales del mila," *Visión de Futuro*, vol. 26, no. 1, pp. 37–58, 2022.
- [4] G. C. Guerrero Camargo and V. A. Aguilar Arteaga, "El modelo de markowitz para la selección de portafolios de inversión," *Perspectivas de la Ciencia y la Tecnología*, vol. 5, no. 9, pp. 1–6, jul.–dic. 2022.